第５講　２次関数(4)

【基礎確認事項】

［1］　絶対不等式

□２次不等式の中にはその解が「すべての実数」となるものがあることは前の講で扱った．このように，すべての実数に対して成り立つ不等式を**絶対不等式**という．変域に制限がある場合については，変域内のすべての実数に対して成り立つ不等式が絶対不等式である．

□一般に，以下のことが成り立つ．

> どんな実数 x に対しても
> ・　$ax^2+bx+c>0$ が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$a>0$　かつ　$D<0$
> ・　$ax^2+bx+c<0$ が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$a<0$　かつ　$D<0$

⇒　C&U ①

［2］　２次方程式の解の配置

□２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が，与えられた範囲にあるための条件を考えるとき，その解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ を利用せず，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を範囲内に配置する解法がある．

□２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解について

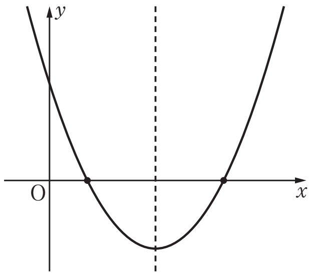
① ２解がともに $x>0$ の範囲にある

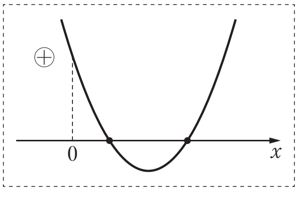
② １解が正，もう１解が負である

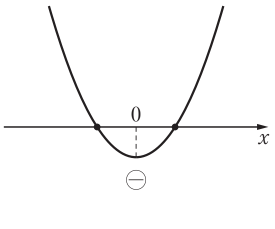
ときをそれぞれ考えよう．ここでは $a>0$ のときを考える．

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ とおくと，グラフの軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$ である．

①のとき，$y=f(x)$ のグラフが右図のようになればよい．まずは，範囲の端（端点という）における y 座標の符号を見る．今回は範囲 $x>0$ の端点 $x=0$ における y 座標，すなわち $f(0)$ である．
図より $f(0)>0$ である．これが $f(0)=0$ や $f(0)<0$ になるとグラフと x 軸との共有点が２つとも $x>0$ になることがない．
これゆえ，$f(0)>0$ である．

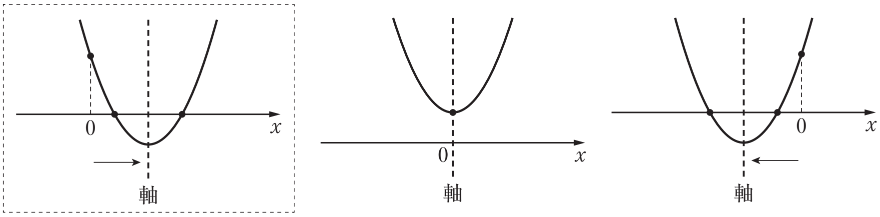






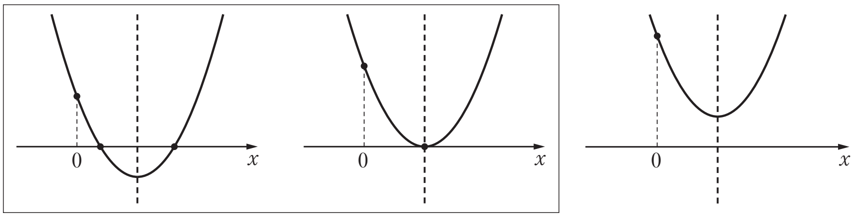
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$f(0)>0$ の状態で，次に軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ を考える．図より軸は $x>0$ の範囲にある．これが $x=0$ や $x<0$ の範囲にあると，グラフと x 軸との共有点が２つとも $x>0$ になることはない．よって，$-\dfrac{b}{2a}>0$ である．



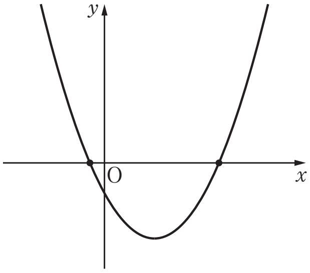
さらに，この状態で範囲内に解が２つあるための条件を考える．一般に方程式の「解が２つ」とは「重解」も含める．重解を含めないときは「異なる２解」と表す．重解をもつのは，グラフが x 軸と「接する」ときである．つまり，範囲内に解が２つあるのは，グラフが x 軸と「２点で交わる」または「接する」ときである．

$f(0)>0$ かつ軸 $-\dfrac{b}{2a}>0$ を満たしても，範囲内の共有点が「１つもない」ことがある．それは「$D<0$」のときである．つまり，最後の条件は $D>0$ または $D=0$，つまり $D\geqq 0$ である．



以上より，$f(0)>0$　かつ　$-\dfrac{b}{2a}>0$　かつ　$D\geqq 0$　であればよいことがわかる．

次に②のとき，$y=f(x)$ のグラフが右図のようになればよい．先ほどと同様，端点における y 座標の符号を見る．



グラフより $f(0)<0$ である．これが $f(0)=0$ や $f(0)>0$ になると共有点の x 座標のうち１つが正，１つが負となることはない．これゆえ，$f(0)<0$ である．

次に $f(0)<0$ の状態で，軸の位置を考える．上のグラフでは軸は $x>0$ の範囲にあるが，軸が $x=0$ や $x<0$ の範囲にあっても，共有点の x 座標のうち１つは正，１つは負である．よって軸の位置は条件に入れる必要がない．

さらに $f(0)<0$ を満たした状態で x 軸との共有点が１個や０個になることはない．これはグラフから明らかであろう．よって D の条件も必要がない．

以上より，$f(0)<0$ であればよいことがわかる．

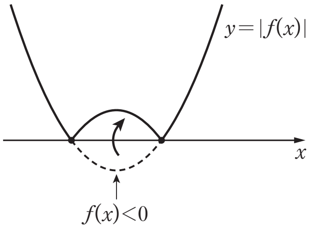
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□方程式の解の配置の問題においては，その条件を満たす関数のグラフとしてその状態を調べ，必要な条件を導くことが有用な方法である．

2次方程式の解の配置においては，必要に応じて
　①　端点の y 座標の正負　　②　軸の位置　　③　判別式 D
に注目するとよい．

⇒　C&U [2]

[3]　$y=|f(x)|$ のグラフ



□絶対値の性質により

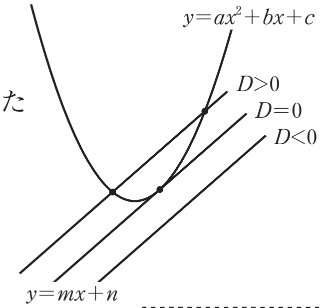
$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

である．$f(x)\geqq 0$ とは関数 $y=f(x)$ のグラフで x 軸上および x 軸より上の部分であり，$f(x)<0$ とは $y=f(x)$ のグラフで x 軸より下の部分である．また，$y=-f(x)$ すなわち $-y=f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．
したがって，以下のことがいえる．

$y=|f(x)|$ のグラフは
$y=f(x)$ のグラフにおいて x 軸より下の部分を x 軸に関して折り返したもの

⇒　C&U [3]

[4]　放物線と直線の共有点



□放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ について，その共有点の x 座標はこの2式より y を消去して x について整理した2次方程式の実数解に一致する．この方程式が実数解をもたないときは，共有点がない．

□整理した2次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ の解は，放物線 $y=Ax^2+Bx+C$ と x 軸との共有点の x 座標を表している．その共有点の個数は，判別式 D の符号に応じて決まる．

⇒　C&U [4]

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　すべての実数 x について　$x^2+(a-3)x+a>0$ が成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

2　2次方程式　$x^2-2mx+m+2=0$ が $x>1$ の範囲に異なる2つの実数解をもつとき，定数 m のとり得る値の範囲を求めよ．

3　次の関数のグラフの概形をかけ．

(1)　$y=|x-3|$　　(2)　$y=|x^2-3x+2|$

4　放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=2x-3$ の共有点の座標を求め，この2つのグラフを図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次関数(4)

1　すべての実数 x に対して，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ ……①　が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　①が $x=-2$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．

(2)　①が $-2<x<0$ に2解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3)　①が $x<-2$ と $-2<x<0$ に1解ずつ解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(4)　①が $-2<x<0$ に少なくとも1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　(1)　x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

(2)　x の方程式 $|x^2-x-2|=2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次関数(4)

2 次方程式 $x^2+ax+2a=0$ が $-1<x<1$ に少なくとも 1 解をもつときの a の値の範囲を求めたい．$f(x)=x^2+ax+2a$ とおくと，$f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=-\dfrac{a}{\boxed{ア}}$ である．また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると $D=a(a-\boxed{イ})$ である．さらに $f(-1)=a+\boxed{ウ}$，$f(1)=\boxed{エ}a+1$ である．$f(x)=0$ が $-1<x<1$ に 2 つの解（重解を含む）をもつのは $-\dfrac{1}{\boxed{オ}}<a\leqq\boxed{カ}$ のときである．また，$-1<x<1$ の範囲に 1 解のみもち，もう 1 解は $x<-1$ または $1<x$ の範囲にあるのは

$-\boxed{キ}<a<-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ のときである．さらに，$x=1$ を解にもつとき $a=-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ であり，このときもう 1 解は $x=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．$x=-1$ を解にもつとき

$a=-\boxed{キ}$ であり，このときもう 1 解は $x=\boxed{コ}$ である．以上より，求める a の範囲は $-\boxed{キ}<a\leqq\boxed{カ}$ となる．

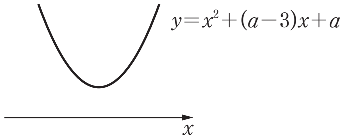
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次関数(4)

【CHECK & UP】



1 $x^2+(a-3)x+a>0$ について

x^2 の係数が正であることより，$D<0$ であればよい．

$D=(a-3)^2-4a<0$

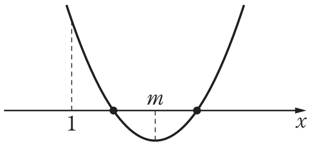
$a^2-10a+9<0$　より　$(a-1)(a-9)<0$

よって　$\boldsymbol{1<a<9}$

> 左辺を２次関数とみることにより，下に凸の放物線のグラフを頭に描くこと．それが >0 すなわち x 軸よりすべて上にあるとき，x 軸との共有点が存在しないことがわかる．それを $D<0$ で処理するのである．

2 $f(x)=x^2-2mx+m+2=0$ とおくと，

$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=m$ である．



$f(1)=1-2m+m+2=-m+3$

$\dfrac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+2)=m^2-m-2=(m-2)(m+1)$

題意を満たすのは，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と異なる２点で交わるときである．それは以下の条件をすべて満たすときである．

$f(1)>0$　より　$-m+3>0$　よって　$m<3$　……①

軸について　$m>1$　……②

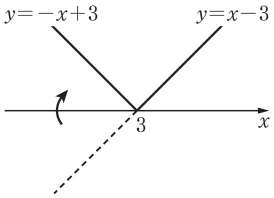
$D>0$ より　$(m-2)(m+1)>0$

$m<-1,\ 2<m$　……③

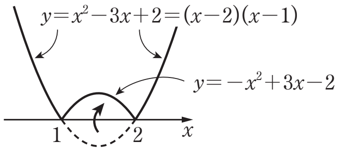
①～③の共通部分を求めて　$\boldsymbol{2<m<3}$

> 解の配置に必要な条件を考えることは，今後，ある条件を満たすために必要なことを考えて発見する力につながる．判別式・軸・端点と暗記するのではなく，なぜこれらの条件が必要なのかを考えて処理できるようにしたい．

3 (1)



(2)



> 絶対値を「場合分け」することにより，式とそれが存在する範囲が得られて図示ができる．ここではその考え方に基づき，$y=|f(x)|$ という「x 軸対称変換」のグラフを，場合分けのプロセスを略して描く練習である．もちろん，折り返した式と，それぞれが存在する範囲を把握しておくこと．

4 $y=x^2-2x+1$ と $y=2x-3$ より　y を消去して

$x^2-2x+1=2x-3$　　　$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$　　よって　$x=2$（重解）

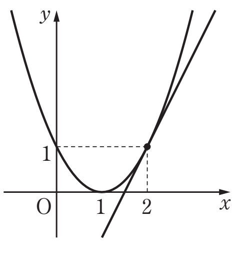
よって２つのグラフの共有点の座標は $\boldsymbol{(2,\ 1)}$ であり，

この点において放物線と直線は接する．

また　$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$

以上より，放物線と直線のグラフは右図．

> 放物線と直線の共有点やその位置関係が話題になるのは数学Ⅱに入ってからである．ここでは放物線の形状や x 軸，y 軸との交点に注目しつつグラフをかく練習に留める．



ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　2次関数(4)

1　すべての実数 x に対して，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ ……①　が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$a=1$ のとき　①より $1>0$　これは x の値に関わらず成り立つ．

$a=-1$ のとき　①より $-2x+1>0$　これはすべての x では成り立たず不適．

$a\neq\pm1$ のとき　①の左辺は x の2次関数である．

よって，$a^2-1>0$ ……②　かつ　$D<0$ ……③　であればよい．

②より　$(a+1)(a-1)>0$　よって　$a<-1,\ 1<a$

③より　$(a-1)^2-4(a^2-1)\cdot1<0$

$(a-1)\{(a-1)-4(a+1)\}<0$　$(a-1)(3a+5)>0$　よって　$a<-\frac{5}{3},\ 1<a$

したがって，②かつ③より　$a<-\frac{5}{3},\ 1<a$

以上より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a<-\frac{5}{3},\ 1\leqq a}$

2　2次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ ……①　について次の問いに答えよ．

(1)　①が $x=-2$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．

(2)　①が $-2<x<0$ に2解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3)　①が $x<-2$ と $-2<x<0$ に1解ずつ解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(4)　①が $-2<x<0$ に少なくとも1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2+(a+2)x-a+1$ とおく．

(1)　$f(-2)=4+(a+2)\cdot(-2)-a+1=-3a+1$　$f(-2)=0$ より　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$

このとき　①は $x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0$　$3x^2+7x+2=0$　$(3x+1)(x+2)=0$　より

他の解は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$

(2)　$f(0)=-a+1>0$　より　$a<1$

$f(-2)>0$ より　$a<\frac{1}{3}$

$y=f(x)$ のグラフの軸　$x=-\frac{a+2}{2}$ について　$-2<-\frac{a+2}{2}<0$

よって　$-2<a<2$

判別式 $D\geqq0$ より　$(a+2)^2-4\cdot1\cdot(-a+1)\geqq0$　$a^2+8a\geqq0$

よって　$a\leqq-8,\ 0\leqq a$

以上より　$\boldsymbol{0\leqq a<\frac{1}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$f(-2)<0$　かつ　$f(0)>0$ であればよい．

$f(-2)<0$ より　$a>\frac{1}{3}$

$f(0)>0$ より　$a<1$

以上より　$\boldsymbol{\frac{1}{3}<a<1}$

(4)　①が $-2<x<0$ と $0<x$ に１解ずつ解をもつのは，$f(-2)>0$　かつ　$f(0)<0$ のときである．

ところが $a<\frac{1}{3}$　かつ　$a>1$ を満たす a の値は存在しない．

また(1)より，$a=\frac{1}{3}$ のとき　①は $x=-\frac{1}{3}$ を解にもち，適する．

さらに　$f(0)=0$ とすると　$a=1$ であるから

このとき①は $x^2+3x=0$　　$x(x+3)=0$　より　$x=0,\ -3$ を２解にもち，不適．

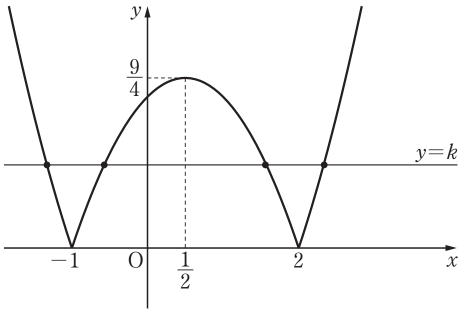
以上と(1)〜(3)より，求める a の範囲は　$0\leqq a<\frac{1}{3}$，$a=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}<a<1$

つまり　$\boldsymbol{0\leqq a<1}$ である．

3　(1)　x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ．
(2)　x の方程式 $|x^2-x-2|=2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(1)　関数 $y=|x^2-x-2|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$ のグラフは右図．

これと直線 $y=k$ との異なる共有点の個数が求める実数解の個数である．



よって　$\boldsymbol{0<k<\frac{9}{4}}$ **のとき　４個**

$\boldsymbol{k=\frac{9}{4}}$ **のとき　３個**

$\boldsymbol{k>\frac{9}{4},\ k=0}$ **のとき　２個**

$\boldsymbol{k<0}$ **のとき　０個**

(2)　$|x^2-x-2|=2x+k$ より　$|x^2-x-2|-2x=k$

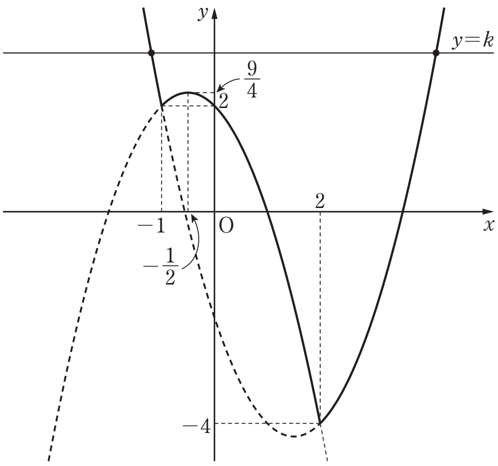
$$y=|x^2-x-2|-2x$$
$$=\begin{cases} x^2-x-2-2x=x^2-3x-2 & (x\leqq-1,\ 2\leqq x) \\ -x^2+x+2-2x=-x^2-x+2 & (-1<x<2) \end{cases}$$

よって，$x\leqq-1,\ 2\leqq x$ のとき　$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

$-1<x<2$ のとき　$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

これよりグラフは右図.
これと直線 $y=k$ との異なる共有点の個数が求める実数解の個数である.



よって　$\boldsymbol{2<k<\frac{9}{4}}$ **のとき　4個**

$\boldsymbol{k=2,\ \frac{9}{4}}$ **のとき　3個**

$\boldsymbol{-4<k<2,\ \frac{9}{4}<k}$ **のとき　2個**

$\boldsymbol{k=-4}$ **のとき　1個**

$\boldsymbol{k<-4}$ **のとき　0個**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次関数(4)

2 次方程式 $x^2+ax+2a=0$ が $-1<x<1$ に少なくとも 1 解をもつときの a の値の範囲を求めたい．$f(x)=x^2+ax+2a$ とおくと，$f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=-\dfrac{a}{\boxed{ア}}$ である．また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると $D=a(a-\boxed{イ})$ である．さらに $f(-1)=a+\boxed{ウ}$，$f(1)=\boxed{エ}a+1$ である．$f(x)=0$ が $-1<x<1$ に 2 つの解（重解を含む）をもつのは $-\dfrac{1}{\boxed{オ}}<a\leqq\boxed{カ}$ のときである．また，$-1<x<1$ の範囲に 1 解のみもち，もう 1 解は $x<-1$ または $1<x$ の範囲にあるのは

$-\boxed{キ}<a<-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ のときである．さらに，$x=1$ を解にもつとき $a=-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ であり，このときもう 1 解は $x=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．$x=-1$ を解にもつとき $a=-\boxed{キ}$ であり，このときもう 1 解は $x=\boxed{コ}$ である．以上より，求める a の範囲は $-\boxed{キ}<a\leqq\boxed{カ}$ となる．

$f(x)=x^2+ax+2a$ のグラフの軸は $x=-\dfrac{a}{\mathbf{2}}$，$f(x)=0$ の判別式 D について

$D=a^2-8a=a(a-\mathbf{8})$　　さらに　$f(-1)=a+\mathbf{1}$，$f(1)=\mathbf{3}a+1$　である．

$f(x)=0$ が $-1<x<1$ に 2 つの解をもつのは $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$-1<-\dfrac{a}{2}<1$，$D\geqq0$

　つまり　$a>-1$　かつ　$a>-\dfrac{1}{3}$　かつ　$-2<a<2$　かつ　$a\leqq0$，$8\leqq a$

　したがって　$-\dfrac{1}{\mathbf{3}}<a\leqq\mathbf{0}$　のとき．

$-1<x<1$ の範囲に 1 解のみもち，もう 1 解は $x<-1$ または $1<x$　の範囲にあるのは

　$f(-1)\cdot f(1)<0$　より　$(a+1)(3a+1)<0$　つまり　$-\mathbf{1}<a<-\dfrac{1}{\mathbf{3}}$　のとき．

$x=1$ を解にもつとき，$f(1)=0$ より　$a=-\dfrac{1}{\mathbf{3}}$

　このとき $f(x)=(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=0$ より　もう 1 解は　$x=-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

　これは　$-1<x<1$　の範囲にあり，適する．

$x=-1$ を解にもつとき，$f(-1)=0$ より　$a=-\mathbf{1}$

　このとき　$f(x)=(x+1)(x-2)=0$ より　もう 1 解は　$x=\mathbf{2}$

　これは　$-1<x<1$　の範囲になく，不適．

以上より，求める a の範囲は

　$-1<a<-\dfrac{1}{3}$，$a=-\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{3}<a\leqq0$　より　$-\mathbf{1}<a\leqq\mathbf{0}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。